STAT0041: Stochastic Calculus

Homework 2 - Martingales

Lecturer: Weichen Zhao　　Fall 2025

1. 设τ和σ为$(\mathscr{F}_n)$停时, 证明：$\tau \vee \sigma := \max(\tau, \sigma)$和$\tau + \sigma$为 $(\mathscr{F}_n)$停时。

2. 设τ和σ为$(\mathscr{F}_n)$停时, 证明：

(1) τ是$\mathscr{F}_\tau$可测的;

(2) 若$\tau \leq \sigma$, 那么 $\mathscr{F}_\tau \subset \mathscr{F}_\sigma$.

3. 设 τ 为停时, $n \in \mathbb{N}_+$. 令

$$\tau_n := 2^{-n}([2^n \tau] + 1),$$

$$\tau_n' := 2^{-n}[2^n \tau],$$

这里 $[x]$ 表示 x 的整数部分. 证明 τ_n 为停时, 并举例说明 τ_n' 不是停时.

4. 设ξ_n为可积独立随机变量序列, 证明：如果$\mathbb{E}\xi_n = 0$, 则$\eta_n := \sum_{i=1}^n \xi_i$ 为 $\mathscr{F}_n = \sigma(\xi_1, \cdots, \xi_n)$-鞅。

5. 设ξ_n为独立同分布随机变量序列, 其分布密度为f，g是另一个分布密度。定义$\eta_n := \prod_{i=1}^n \frac{g(\xi_i)}{f(\xi_i)}$，证明：$\eta_n$ 为 $\mathscr{F}_n = \sigma(\xi_1, \cdots, \xi_n)$-鞅。

6. 若 (X_n) 是非负 $\mathscr{F}_n$ 下鞅列，C_n 是 $\mathscr{F}_n$非负可料随机序列，且对任意的 $n \geq 0$，$\mathbb{E}|C_n| < \infty$，证明：鞅变换$Y_n = C_0 X_0 + \sum_{k=1}^n C_k(X_k - X_{k-1})$是 $\mathscr{F}_n$ 下鞅。

7. (Kolmogorov不等式) 设ξ_n为独立同分布随机变量序列，满足$\mathbb{E}\xi_n = 0$. 定义$\eta_n := \sum_{i=1}^n \xi_i$, 记$\mathbb{E}\xi_n^2 := \sigma_n^2$, 证明：对任意$\epsilon > 0$，有

$$\mathrm{P}(\max_{1 \leq n \leq N} |\eta_n| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{n=1}^N \sigma_n^2.$$

Hint: 利用第4题结论，对下鞅η_n^2用Doob不等式。